Método Axiomático e Teorias Formais

#14

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Nesta apresentação, irei mostrar uma axiomatização para a mecânica de partículas clássica construída por McKinsey, Sugar e Suppes no ano de 1953, na forma exibida em *Suppes (1957)*, feita por meio de um predicado conjuntista.

Patrick Suppes (1922-2014)

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Essa axiomatização tem como base seis noções primitivas –

$$P, T, s, m, f, g:$$

- P e T são conjuntos.
- s é uma função binária.
- m é uma função unária.
- f é uma função ternária.
- g é uma função binária.

Axiomatização da Mecânica de Partículas

As intepretações físicas pretendidas dessas noções primitivas são:

- P é um conjunto de partículas e T corresponde a um intervalo de tempo.
- $s: P \times T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função posição. Assim, se $p \in P$ e $t \in T$, então $s(p, t)$ é um vetor que nos dá a posição da partícula p no instante t (para cada $p \in P$, é conveniente introduzir a notação $s_p(t)$ para sua função posição).
- $m: P \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de massa. Assim, se $p \in P$, então $m(p)$ corresponde ao valor numérico da massa da partícula p (estamos supondo que a massa não varia com o tempo).

Axiomatização da Mecânica de Partículas

As intepretações físicas pretendidas dessas noções primitivas são:

- $f: P \times P \times T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função força interna. Se $p, q \in P$ e $t \in T$, então $f(p, q, t)$ é a força (interna) que a partícula q exerce sobre a partícula p no instante t.
- $g: P \times T \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função força externa. Se $p \in P, t \in T$, então $g(p, t)$ é a força resultante externa agindo sobre a partícula p no instante t.

O próximo passo é definir os axiomas que estabelecem o comportamento dos termos primitivos.

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Definição 1. $\mathfrak{B} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ é um sistema de mecânica de partículas (SMP) se, e somente se, para cada $p, q \in P$ e $t \in T$, os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. O conjunto P é finito e não vazio.
2. O conjunto T é um intervalo de números reais.
3. s_p é duas vezes diferenciável em T.
4. $m(p) > 0$.
5. $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.
6. $s(p, t) \times f(p, q, t) = -s(q, t) \times f(q, p, t)$.
7. $m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t)$.

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Definição 1. $\mathfrak{B} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ é um sistema de mecânica de partículas (SMP) se, e somente se, para cada $p, q \in P$ e $t \in T$, os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. O conjunto P é finito e não vazio.
2. O conjunto T é um intervalo de números reais.
3. s_p é duas vezes diferenciável em T.
4. $m(p) > 0$.
5. $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.
6. $s(p, t) \times f(p, q, t) = -s(q, t) \times f(q, p, t)$.
7. $m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t)$.

"Condições de contorno"

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Definição 1. $\mathfrak{B} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ é um sistema de mecânica de partículas (SMP) se, e somente se, para cada $p, q \in P$ e $t \in T$, os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. O conjunto P é finito e não vazio.
2. O conjunto T é um intervalo de números reais.
3. s_p é duas vezes diferenciável em T.
4. $m(p) > 0$.
5. $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.
6. $s(p, t) \times f(p, q, t) = -s(q, t) \times f(q, p, t)$.
7. $m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t)$.

3ª Lei de Newton: Se p exerce uma força sobre q, então q exerce uma força de igual intensidade, mesma direção e sentido oposto em p.

Axiomatização da Mecânica de Partículas

Definição 1. $\mathfrak{B} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ é um sistema de mecânica de partículas (SMP) se, e somente se, para cada $p, q \in P$ e $t \in T$, os seguintes axiomas são satisfeitos:

1. O conjunto P é finito e não vazio.
2. O conjunto T é um intervalo de números reais.
3. s_p é duas vezes diferenciável em T.
4. $m(p) > 0$.
5. $f(p, q, t) = -f(q, p, t)$.
6. $s(p, t) \times f(p, q, t) = -s(q, t) \times f(q, p, t)$.
7. $m(p)\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t)$.

2ª Lei de Newton: $ma = F_{res}$

1ª Lei de Newton

Teorema 1: Seja $\mathfrak{B} = \langle P, T, s, m, f, g \rangle$ um SMP e $p \in P$, para todo $t \in T$, $\sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t) = 0$. Então, existem vetores α e β tais que $s_p(t) = \alpha + \beta t$.

Demonstração:

Pelo axioma 3, $s_p(t)$ é duas vezes diferenciável, logo, $\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2}$ existe.

Pelo axioma 7, $m(p) \frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = \sum_{q \in P} f(p, q, t) + g(p, t) = 0$.

Mas conforme o axioma 4, $m(p) > 0$, portanto, $\frac{d^2 s_p(t)}{dt^2} = 0$.

Integrando duas vezes a equação diferencial anterior em relação a t, obtemos que $s_p(t) = \alpha + \beta t$.

Número Imaginário

numeroimaginario.com.br